Colegiul Național "Mircea cel Bătrân" Constanța

Concursul Național de Matematică "N. N. Mihăileanu"

Ediția a XVII-a, 28 mai 2016

Clasa a IX-a

Subiectul 1

Fie triunghiul ABC de ortocentru H și centru de greutate G. Fie A', B', C' punctele diametral opuse lui A, B și respectiv C în cercul circumscris triunghiului ABC. Fie H_1, H_2, H_3 ortocentrele triunghiurilor BCA', CAB', respectiv ABC', iar G_1, G_2, G_3 centrele de greutate ale acelorași triunghiuri. Arătați că $\overrightarrow{H_1G_1}+\overrightarrow{H_2G_2}+\overrightarrow{H_3G_3}=\overrightarrow{HG}$.

Gabriela Constantinescu

Subiectul 2

Pe diagonalele (AC) și (BD) ale unui patrulater convex considerăm punctele E, respectiv F astfel încât $EF \| BC$. Fie $\{Q\}=AF\cap DC$ și $\{P\}=DE\cap AB$. Demonstrați că $PQ \| EF$.

Gazeta matematică

Subiectul 3

a) Dacă $0<a\le x\le b$, arătați că $x+\frac{ab}{x}\le a+b$.

b) Dacă $x, y, z\in[1, 2]$ arătați că $\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}\le\frac{7}{2}$.

Nelu Chichirim

Subiectul 4

Pentru fiecare $n\in\mathbf{N}^*$ notăm cu d_n cel mai mare divizor impar al lui n. Arătați că:

$$\frac{n^2+2}{3}\le d_1+d_2+\cdots+d_n\le\frac{n^2+2n}{3},\ \forall n\in\mathbf{N}^*$$

Cătălin Zîrnă

Notă. Timp de lucru: 3 ore.
Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare problemă are 7 puncte.